УДК

Л.М. Любчик, М.Н. Малько

# СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ ОБРАТНЫХ СИСТЕМ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

Запропоновано методику аналітичного конструювання обернених динамічних систем. З застосуванням спостерігачів для систем з невідомим входом одержані параметрізовані реалізації обернених систем в просторі станів.

Обратные динамические системы находят широкое применение в разнообразных задачах идентификации и управления, в том числе и при решении задач компенсации неизмеряемых возмущений [1]. Необходимым этапом решения указанных задач является построение минимальных реализаций обратных систем в пространстве состояний, являющихся основой для конструирования соответствующих алгоритмов оценивания и управления. С точки зрения практической реализации процедуру синтеза обратных систем желательно декомпозировать на этап структурного синтеза, обеспечивающего получение уравнений минимальных реализаций с точностью до набора произвольных настраиваемых параметров, и этап параметрического синтеза, на котором осуществляется конкретный выбор указанных параметров из условий обеспечения заданных требований к динамике обратной системы (устойчивости и качества переходных процессов) или оптимизации показателей качества. При этом желательно минимизировать число настраиваемых параметров с целью упрощения методики параметрической оптимизации.

В настоящей работе параметризованные минимальные реализации обратных систем строятся на основе наблюдателей для систем с неизвестным входом. Указанный подход позволяет алгоритмизировать процедуру структурного синтеза, получить простые алгебраические условия разрешимости задачи и предложить процедуру регуляризации при их невыполнении.

Рассмотрим задачу обратной минимальной реализации для дискретной динамической системы

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ y_k &= Cx_k, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $x_k \in R^n$ – вектор состояний на $k$-том шаге, $u_k \in R^m$ – вектор входных сигналов, $y_k \in R^q$ – вектор выходных сигналов. Без ограничения общности можно принять, что $\operatorname{rank} B = m$, $\operatorname{rank} C = q$.

По аналогии с теорией динамических наблюдателей будем называть дискретную динамическую систему

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= A^I \bar{x}_k + B_1^I y_k + B_2^I y_{k+d}, \\ \bar{u}_k &= C^I \bar{x}_k + D_1^I y_k + D_2^I y_{k+d}, \end{aligned} \tag{2}$$

с вектором состояний $\bar{x}_k \in R^{n-q}$ асимптотически обратной к (1), если выполняются условия $\|\bar{x}_k - Rx_k\| \to 0$, $\|\bar{u}_k - u_k\| \to 0$, $k \to \infty$, где $R_{n-q\times n}$ – некоторая матрица агрегирования. Тогда, $\bar{u}_k$ можно трактовать как динамическую оценку входного сигнала $u_k$, полученную с помощью обратной системы (2), при этом целое число $d \ge 1$ определяет минимальное запаздывание указанной оценки, обеспечивающее физическую реализуемость обратной системы. Из общей теории обращения линейных систем [3] известно, что $d$ совпадает с относительным порядком системы (1), т.е. минимальным целым, при котором $S(d) = CA^{d-1}B \ne 0$.

Для получения решения задачи структурного синтеза воспользуемся теорией инвариантных наблюдателей [1]. Ограничимся рассмотрением системы единичного относительного порядка, для которых $S = CB \ne 0$. Трактуя $u_k$ как неизвестный вход, получим оценку вектора состояния системы (1) с помощью динамического наблюдателя пониженного порядка вида

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \bar{F}\tilde{x}_k + \bar{G}y_k, \\ \bar{x}_k &= \tilde{x}_k + \bar{H}y_k, \\ \hat{x}_k &= Py_k + Q\bar{x}_k, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\bar{x}_k \in R^{n-q}$ – оценка вектора $Rx_k$, $\tilde{x}_k$ – вектор состояния наблюдателя, а матрицы $P_{n\times q}$ и $Q_{n\times n-q}$ однозначно определяются выбранной матрицей агрегирования, такой, что $\operatorname{rank} R = n - q$.

$$\begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ R \end{pmatrix}^{-1}. \tag{4}$$

Из (4) с очевидностью следует, что

$$CP = I_q, \quad RQ = I_q, \quad PC + QR = I_n,$$
$$CQ = O_{q \times n-q}, \quad RP = O_{n-q \times q}. \tag{5}$$

Тогда уравнения динамической части наблюдателя (3) могут быть преобразованы к виду

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{F}\bar{x}_k + \left(\bar{G} - \bar{F}\,\bar{H}\right)y_k + Hy_{k+1}. \tag{6}$$

При этом ошибки оценивания $e_k^x = x_k - \hat{x}_k$ и $\bar{e}_k^x = Rx_k - \bar{x}_k$ связаны линейным преобразованием $e_k^x = Q\bar{e}_k^x$ и определяются уравнением:

$$\bar{e}_{k+1}^x = \bar{F}\bar{e}_k^x + \left[RA - \bar{F}R - \left(\bar{G} - \bar{F}\,\bar{H}\right)C - \bar{H}CA\right]x_k + \left(RB - HC\right)u_k. \tag{7}$$

Из уравнения (7) следуют условия независимости вектора ошибки оценивания от переменных состояния (1):

$$\left(R - \bar{H}C\right)A - \bar{F}\left(R - \bar{H}C\right) = \bar{G}C, \quad RB = HCB. \tag{8}$$

Нетрудно показать, что система линейных матричных уравнений (8), представляет собой фактически условия инвариантности наблюдателя (3) по отношению к неизвестному входному сигналу $u_k$, разрешима при выполнении условия обратимости

$$\operatorname{rank} S = q, \quad q \geq m, \tag{9}$$

характеризующего разрешимость задачи структурного синтеза. Тогда решение системы (8) может быть получено в виде

$$\bar{F} = R\Pi AQ, \quad \bar{G} = R\Pi A\left(H + P\Omega\right), \quad \bar{H} = RBS^{+}, \tag{10}$$

где проекционные матрицы $\Pi = I_n - BS^{+}C$, $\Omega = I_q - SS^{+}$ связаны очевидным соотношением $C\Pi = \Omega C$.

Выбирая оценку неизвестного входного сигнала $u_k$ в виде

$$\bar{u}_k = B^{+}\left(\hat{x}_{k+1} - A\hat{x}_k\right) \tag{11}$$

и трактуя его как выходной сигнал синтезируемой обратной системы, окончательно получаем ее уравнение с учетом (3), (5) в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= R\Pi AQ\bar{x}_k + R\Pi APy_k + RBS^+ y_{k+1}, \\ \bar{u}_k &= \left(S^+ + B^+ PR\right)\left(y_{k+1} - CAQ\bar{x}_k - CAPy_k\right), \end{aligned} \tag{12}$$

по форме совпадает с (2) при $d = 1$.

Таким образом, матрица динамики обратной системы $A^I = R\Pi AQ$ оказывается параметризованной произвольно выбираемой матрицей агрегирования $R$ заданного ранга $n - q$.

Конкретизируем структуру параметризованной обратной системы, задавшись следующим блочным представлением системы (1):

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} I_q & O_{n-q\times q} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{array}{l} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} q \\ n-q \end{array} \end{array}. \tag{13}$$

Выберем матрицы $P$ и $Q$ также в конкретной блочной форме

$$\begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} q \\ n-q \end{array}, \quad P_1 = I_q, \quad Q_1 = O_{q\times n-q}. \tag{14}$$

Тогда из (4) следует, что при $\det Q_2 \neq 0$

$$R = Q_2^{-1}\left(-P_2 \quad I_{n-q}\right). \tag{15}$$

Путем несложных алгебраических преобразований можно показать, что в этом случае

$$R\Pi AQ = Q_2^{-1}\left(\widetilde{A}_{22} - P_2 \Omega_{B_1} A_{12}\right)Q_2, \tag{16}$$

где $\widetilde{A}_{22} = A_{22} - B_2 B_1^+ A_{12}$, $\Omega_{B_1} = I_q - B_1 B_1^+$.

Поскольку матрица $Q_2$ задает, фактически, преобразование подобия матрицы динамики $A^I$ и не изменяет ее спектр, то можно принять $Q_2 = I_{n-q}$ и задача параметрического синтеза обратной системы сводится к выбору настроечной матрицы $P_{2\,n-q\times q}$.

Очевидно, что полученная задача модального синтеза разрешима при выполнении условия полной наблюдаемости пары матриц $\left(\widetilde{A}_{22}, \Omega_{B_1} A_{12}\right)$. Это условие заведомо нарушается в весьма важном в практическом отношении случае квадратной системы (1), т.е. когда $m = q$. Действительно, при этом $\Omega_{B_1} = 0$ и матрица динамики $A^I$ оказывается независимой от настроечной матрицы $P_2$. В этом случае для обеспечения сохранения возможности настройки обратной системы целесообразно воспользоваться методикой [1]. Построим приближенную реализацию обратной системы, заменив условие полной инвариантности ошибки к неизвестному входному сигналу (7) частичной инвариантностью:

$$\left\| RB - HCB \right\|^2 + \varepsilon \left\| H \right\|^2 \to \min_H , \tag{17}$$

где $\varepsilon > 0$ – параметр регуляризации. При этом $\overline{H}(\varepsilon) = RBS^{\mathrm{T}} \left(\varepsilon I_q + SS^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$ и решение задачи структурного синтеза приобретает вид

$$\begin{aligned}
&\overline{F}(\varepsilon) = \widetilde{A}_{22}(\varepsilon) - P_2 \Omega_{B_1}(\varepsilon) A_{12}, \\
&\widetilde{A}_{22}(\varepsilon) = A_{22} - B_2 \Psi_{B_1}(\varepsilon) A_{12}, \\
&\Psi_{B_1}(\varepsilon) = B_1^{\mathrm{T}} \left(\varepsilon I_q + B_1 B_1^{\mathrm{T}}\right), \\
&\Omega_{B_1}(\varepsilon) = I_q - B_1 B_1^{\mathrm{T}} \left(\varepsilon I_q + B_1 B_1^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \varepsilon \left(\varepsilon I_q + B_1 B_1^{\mathrm{T}}\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Уравнения ошибок оценивания для регуляризованной обратной системы приобретут следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\bar{e}^x_{k+1} = \overline{F}(\varepsilon) \bar{e}^x_k + \varepsilon RB \left(\varepsilon I_q + S^{\mathrm{T}} S\right)^{-1} u_k, \\
&e^u_k = -B^+ \left(H(\varepsilon) + P\Omega(\varepsilon)\right) CAQ \bar{e}^x_k + \varepsilon B^+ (I - PC) \left(\varepsilon I_q + S^{\mathrm{T}} S\right)^{-1} u_k.
\end{aligned}$$

Таким образом, введение регуляризации обеспечивает возможность обеспечения заданных динамических свойств синтезированной обратной системы в вырожденном случае.

**Список литературы:** 1. Костенко Ю.Т., Любчик Л.М. Системы управления с динамическими моделями. – Харьков: Основа, 1996. – 212с. 2. Hou M., Muller P.C. Design of observers for linear systems with unknown inputs. IEEE Trans. on Automatic Control, 1992, v.37, pp.871-875. 3. Silverman L.M. Inversion of multivariable linear systems. IEEE Trans. on Automatic Control, 1969, v.14, pp.270-276.